5. Revêtements

<u>Rappel</u>: Un <u>revêtement</u> d'un espace X est une app. $p : \tilde{X} \to X$ t.q. $\forall x \in X\ \exists\, U \subset X$ vois. ouvert de x t.q. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_i U_i$ et $p_{|U_i} : U_i \to U$ est un homeo.

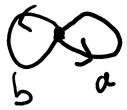
· Chaque $U \subset X$ avec cette prop. est appelé <u>adapté</u> et les U_i sont <u>les feuilles</u> de $\tilde{X}$ au-dessus de U

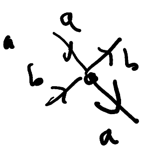
<u>Rmk</u>: Pour ce cours connexe veut tjs dire connexe par arcs.

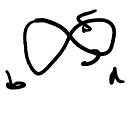
<u>Exple</u>: $\mathbb{R} \to S^1$, $S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} S^1$, $\subset \mathbb{C}$  En fait ce sont les seuls revêtements connexe de S^1!

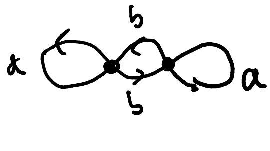
En même temps $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ a les sous-groupes $\{0\}$ et $n\mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$.
Notre premier but sera d'établir une correspondence

$$\{\text{Sous-grp de } \pi_1(X)\} \longleftrightarrow \{\text{Revêtements de } X\}$$

<u>Exple</u>: $X =$ 

. Soit Γ un graphe t.q. tous les sommets ont 4 arêtes. On appelle Γ <u>2-orienté</u> si on peut labelliser chaque arête avec une des lettres a, b t.q. a chaque sommet on a 

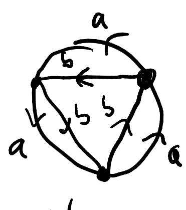
<u>Exple</u>: 

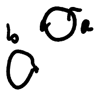


, ...

Exercise: $\Gamma \to X = \infty$ est un revêtement. pour Γ 2-orienté.

sommet $\longrightarrow$ •

$\xrightarrow{a} \ \longmapsto$ 

$\xrightarrow[b]{} \ \longmapsto$ 

<u>5.1: Propriétés de relèvements</u>: Soit $p : \tilde{X} \to X$ un rev.

Rappel: Un <u>relèvement</u> de $f : Y \to X$ est une app. $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$

Rappel : Un relèvement de $f: Y \to X$ est une app. $\tilde f: Y \to \tilde X$ t.q. $p\circ\tilde f = f$.

$$\begin{tikzcd} & \tilde X \arrow[d] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde f"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Prop 5.1 (Rel. des homotopies) : Soit $H: Y\times I \to X$ et $\tilde H_0: Y\times\{0\}\to\tilde X$ un rel. de $H|_{Y\times\{0\}}$. Alors $\exists!\, \tilde H: Y\times I\to\tilde X$ qui relève H et t.q. $\tilde H|_{Y\times\{0\}} = \tilde H_0$.

pf : C'est Prop 2.11.

En part. si $Y=\{pt\}$ on a que chaque chemin admet un unique rel. une fois un point de base est choisi dans $\tilde X$.

Corollaire 5.2 : Soit $p:(\tilde X,\tilde x_0)\to(X,x_0)$ un revêtement. Alors $p_*: \pi_1(\tilde X,\tilde x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ est injective.

En plus $\mathrm{Im}(p_*) = \left\{[\alpha]\in\pi_1(X,x_0) \;\middle|\; \begin{array}{l}\tilde\alpha(1)=\tilde x_0 \text{ où } \tilde\alpha: I\to\tilde X \\ \text{est l'unique rel. de } \alpha \text{ avec } \tilde\alpha(0)=\tilde x_0\end{array}\right\}$

Exple : $S^1\to S^1$
$z\mapsto z^n$

preuve : Soit $[\alpha]\in\ker(p_*) \iff p\circ\alpha\simeq c_{x_0} \iff \exists H: I\times I\to X$ avec $H(t,0)=p\circ\alpha(t)$ et $H(t,1)=x_0$ $\forall t\in I$.

Par 5.1 $\exists\, \tilde H: I\times I\to\tilde X$ t.q. $\tilde H(t,0)=\alpha(t)$ et $\tilde H(t,1)$ est un rel. de c_{x_0}. Par l'unicité du rel. $\tilde H(t,1)=c_{\tilde x_0}$ et donc $[\alpha]=1\in\pi_1(\tilde X)$

Pour l'image, chaque $[\alpha]\in\mathrm{Im}(p_*)$ est de la forme $\alpha= p\circ\tilde\alpha$ avec $\tilde\alpha$ un lacet dans $\tilde X$. Celui est forcément unique par 5.1 $\square$

Cor 5.3 : Si X et $\tilde X$ sont connexe on a une bijection

$$\pi_1(X,x_0)/_{p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))} \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x_0)$$

En part. le cardinal de $p^{-1}(x_0)$ est indep. de $x_0\in X$.

pf : Soit $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ et $\tilde\alpha$ le rel. unique avec $\tilde\alpha(0)=\tilde x_0$. Alors pf: Soit $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ et $\tilde\alpha$ le rel. unique avec $\tilde\alpha(0)=\tilde x_0$. Alors $\tilde\alpha(1)\in p^{-1}(x_0)$ et si $\alpha'\simeq\alpha$, alors $\tilde\alpha'\simeq\tilde\alpha$ par 5.1 et donc $\tilde\alpha'(1)=\tilde\alpha(1)$ car $p^{-1}(x_0)$ est discrète. $\rightsquigarrow \hat\Phi:\pi_1(X,x_0)\longrightarrow p^{-1}(x_0)$, $[\alpha]\mapsto\tilde\alpha(1)$

En plus, pour $[\beta]\in H=p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$ on a par 5.2 que $\tilde\beta(0)=\tilde\beta(1)=\tilde x_0$ et donc $\hat\Phi([\alpha]\cdot[\beta])=\hat\Phi([\alpha])\ \forall\beta\in H$. $\rightsquigarrow \Phi:\pi_1(X,x_0)/_H\longrightarrow p^{-1}(x_0)$.

· Φ est surj, car $\forall y\in p^{-1}(x_0)\ \exists\gamma: I\to\tilde X$ avec $\gamma(0)=\tilde x_0$ et $\gamma(1)=y$ comme $\tilde X$ est connexe. $\rightsquigarrow \Phi([p\circ\gamma])=\gamma(1)=y$.

· Φ est inj. car si $\Phi([\alpha]H)=\Phi([\beta]H)$, alors $\tilde\alpha(1)=\tilde\beta(1)$. Donc $\tilde\alpha*\tilde\beta^{-1}$ est un lacet dans $\tilde X$. $\rightsquigarrow p_*([\tilde\alpha*\tilde\beta^{-1}])=[\alpha]\cdot[\beta]^{-1}\in H \Leftrightarrow [\alpha]H=[\beta]H$.

Si $x_0'\in X$ est un autre point et $\gamma: I\to X$ t.q. $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(1)=x_0'$ on a

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\tilde X,\tilde x_0) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "p_*"] & \pi_1(\tilde X,\tilde\gamma(1)) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[r, "\sim"] & \pi_1(X,x_0') \\
{[\alpha]} \arrow[r, mapsto] & {[\gamma^{-1}*\alpha*\gamma]}
\end{tikzcd}$$

$\rightsquigarrow p^{-1}(x_0)\cong\pi_1(X,x_0)/_{\mathrm{Im}(p_*)}$

$\cong\pi_1(X,x_0')/_{\mathrm{Im}(p_*)}\cong p^{-1}(x_0')$ □

Prop 5.4 (Existence d'un rel.) Soit $f:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ avec Y connexe et localement connexe. Alors

$\exists$ un rel. $\tilde f:(Y,y_0)\to(\tilde X,\tilde x_0)$ de $f \Leftrightarrow f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$

Rmk: Localement ..... $\Leftrightarrow$ Chaque point admet des vois. arbitrairem. petit t.q .....

preuve: "$\Rightarrow$" est clair car $f_*=(p\circ\tilde f)_*=p_*\circ\tilde f_*$

"$\Leftarrow$": Pour définir $\tilde f: Y\to\tilde X$ soit $y\in Y$ et γ un chemin de y_0 vers y.

Alors $f\circ\gamma$ admet un rel. unique $\widetilde{f\gamma}: I\to\tilde X$ et on définie

$$\tilde f(y):=\widetilde{f\gamma}(1).$$

Si γ' est un autre chemin de y_0 vers y, alors $f\circ\gamma*\gamma'^{-1}$ est un lacet et $[f\circ\gamma*\gamma'^{-1}]=f_*[\gamma*\gamma'^{-1}]\subset p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde x_0))$

Si γ' est un autre chemin de y_0 vers y, alors $f\circ\gamma * \gamma'$ est un lacet et $[f\circ\gamma * \gamma'^{-1}] = f_*[\gamma * \gamma'^{-1}] \subset p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$.

$\overset{5.2}{\leadsto}$ $\widetilde{f\circ\gamma*\gamma'^{-1}}$ est un lacet dans $\tilde{X}$ et par l'unicité des rel.

$\widetilde{f\circ(\gamma*\gamma'^{-1})} = \widetilde{f\circ\gamma} * \widetilde{f\circ\gamma'}^{-1} \Rightarrow \widetilde{f\circ\gamma}(1) = \widetilde{f\circ\gamma'}(1)$ et donc $\tilde{f}$ est bien défi.

<u>$\tilde{f}$ est continue</u>: Soit $y\in Y$, $U\subset X$ un vois. adapté de $f(y)$ et $\tilde{U}\subset\tilde{X}$ t.q. $\tilde{f}(y)\in\tilde{U}$ et $p_{|\tilde{U}}: \tilde{U}\to U$ est un homeo.

Soit $V\ni y$ un vois. connex t.q. $f(V)\subset U$. Pour $y'\in V$ on choisi un chemin $\gamma*\eta$ ou γ va de y_0 à y et η de y à y'. On a que $\tilde{f}(y') = \widetilde{f\circ\eta}(1)$

Mais $\widetilde{f\circ\eta} = (p_{|\tilde{U}})^{-1}\circ f\circ\eta$ par l'unicité et donc $\tilde{f}_{|V} = (p_{|\tilde{U}})^{-1}\circ f$ est continue. $\square$

<u>Prop 5.5</u> (Unicité des rel.): Soient $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y\to\tilde{X}$ deux rel. de $f: Y\to X$ et Y connex. Alors s'il $\exists\, y_0\in Y$ t.q. $\tilde{f}_1(y_0) = \tilde{f}_2(y_0)$ on a $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.

<u>preuve</u>: Soit $V = \{y\in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$. Alors $y_0\in V\neq\emptyset$.

Pour $y\in V$ soit U un vois. adapté de $f(y)$ et $\tilde{U}$ la feuille t.q. $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\in\tilde{U}$. Par continuité il existe un vois $N\ni y$ t.q. $f(N)\subset U$ et donc $\tilde{f}_{1|N} = p_{|\tilde{U}}^{-1}\circ f_{|N} = \tilde{f}_{2|N}$ $\leadsto$ V est ouvert.

Si $y\in Y\setminus V$ on trouve par le même argument un vois $N\ni y$ t.q. $\tilde{f}_1(y') \neq \tilde{f}_2(y')$ $\forall y'\in N$ $\leadsto$ V est fermé $\leadsto$ $V = Y$ $\square$

5.3 Classification des revêtements:

On a une application

$$\left\{\text{Revê. } \tilde{X}\xrightarrow{p} X\right\} \longrightarrow \left\{\text{Sous-grps de } \pi_1(X)\right\}$$
$$\tilde{X} \longmapsto p_*\pi_1(\tilde{X})$$

$$\tilde{X} \mapsto p_* \pi_1(\tilde{X})$$

Est-ce qu'elle est surjective? Plus simple :

Est-ce que $\{1\}$ est dans l'image $\overset{5.2}{\iff}$ $\exists$ un rev. $\tilde{X} \to X$ simpl. connexe ?

Une condition nécessaire est la suivante :

<u>Def:</u> Un esp. X est <u>semi-localement simplement connexe</u> (slsc) si $\forall x \in X$ $\exists$ vois $U \ni x$ t.q. l'homom $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ est trivial.

<u>Exple:</u> · X simp. connexe $\Rightarrow$ slsc car $\pi_1(X,x) = 1$ $\forall x$.

· Pareil si X est loc. simp. conn $\Rightarrow$ slsc car on peut choisir U t.q. $\pi_1(U,x) = 1$.

$$\begin{tikzcd} \text{sim. connexe} \arrow[r, Rightarrow, "/" description] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{loc. simp. connexe} \arrow[d, Rightarrow, shift left] \\ & \text{slsc} \arrow[u, Rightarrow, shift left, "\times\ \text{Ex.}"'] \end{tikzcd}$$

<u>Lemme 5.6:</u> Soit $p: \tilde{X} \to X$ un revêtement t.q. $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$. Alors X est slsc.

<u>Pf:</u> Soit $x \in X$, $U \ni x$ adapté et $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ t.q. $p|_{\tilde{U}}$ est un homéom. Alors $\forall [\alpha] \in \pi_1(U,x)$ soit $\tilde{\alpha} = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ \alpha : I \to \tilde{U}$ le rel. unique. Comme $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$ $\exists \tilde{H}: I \times I \to \tilde{X}$ homot. de $\tilde{\alpha}$ à $c_{(p|_{\tilde{U}})^{-1}(x)}$ $\rightsquigarrow$ $p \circ \tilde{H}$ est une homot. de α à c_x.
$\rightsquigarrow$ $[\alpha] = 1 \in \pi_1(X,x)$ $\square$

<u>Thm. 5.7:</u> Soit X connex, loc. connex et slsc. Alors $\exists\, p: \tilde{X} \to X$ simp. connex i.e. $\pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$.

<u>Pf:</u> Soit $x_0 \in X$. On définit

$$\tilde{X} = \{\gamma \mid \gamma : I \to X, \gamma(0) = x_0\} /\sim$$

où $\gamma \sim \gamma' \iff \gamma \simeq \gamma'$ par une homot. qui fixe $\gamma(0) = \gamma'(0)$ et $\gamma(1) = \gamma'(1)$.

On a $p: \tilde{X} \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, qui est bien-déf et surj. car X est connex.

Pour définir une topologie sur $\tilde{X}$, soit

indep du point de base, car U connex.

Pour définir une topologie sur $\tilde{X}$, soit ... base, car U connex.

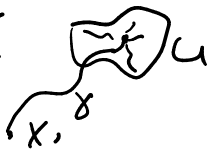
$$\mathcal{U} = \{ U \subset X \text{ ouvert, connex t.q. } \pi_1(U) \to \pi_1(X) \text{ est trivial} \}$$

Si $V \subset U$ est connex et $U \in \mathcal{U}$, alors $V \in \mathcal{U}$ car $\pi_1(V) \to \pi_1(U) \to \pi_1(X)$.

Si X est loc. connex et slsc $\forall x \in X \; \exists U \in \mathcal{U}$ voir de x. $\Rightarrow \mathcal{U}$ est une base de la top. sur X.

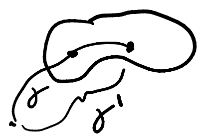
Pour $U \in \mathcal{U}$ et $\gamma : I \to X$ t.q. $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) \in U$ on def.

$$U_{[\gamma]} = \{ [\gamma \cdot \eta] \mid \eta : I \to U \text{ et } \eta(0) = \gamma(1) \} \subset \tilde{X}$$



- $U_{[\gamma]}$ ne dépend que de $[\gamma]$.
- $p : U_{[\gamma]} \to U$ est surj car U est connex
- " est inj. car si $\eta(1) = \eta'(1)$ alors $\eta \simeq \eta'$ comme $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ est trivial

$(*)$: Pour $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ on a $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$:



A) $\{ U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, \gamma : I \to X, \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma(1) \in U \}$ est la base d'une top. pour $\tilde{X}$:

<u>pf</u>: Clairement $\forall [\gamma] \in \tilde{X}$, $[\gamma] \in U_{[\gamma]}$ pour $U \ni \gamma(1)$.

Si $[\gamma''] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$ on a $U_{[\gamma'']} = U_{[\gamma]}$, $V_{[\gamma'']} = V_{[\gamma']}$ par $(*)$

En plus $\gamma''(1) \in U \cap V \Rightarrow (U \cap V)_{[\gamma'']} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\gamma']}$. A $\square$

B) La bij. $p : U_{[\gamma]} \to U$ est un homeom., en part. $p : \tilde{X} \to X$ est continue.

<u>pf</u>: On a une bij entre les bases de la topo.

$$\{ V_{[\gamma']} \subset U_{[\gamma]} \} \longrightarrow \{ V \subset U \mid V \in \mathcal{U} \}.$$

$$V_{[\gamma']} \longmapsto p(V_{[\gamma']}) = V.$$

$$V_{[\gamma']} = p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]} \longleftarrow V$$

$$V_{[\gamma']} = p^{-1}(V) \cap U_{[\gamma]} \hookrightarrow V$$

pour $[\gamma'] \in U_{[\gamma]}$ t.q. $\gamma'(1) \in V$, car $U_{[\gamma']} \overset{(\beta)}{=} U_{[\gamma]}$ $\square$ B

C) $p : \tilde{X} \to X$ est un revê.

pf: $\forall U \in \mathcal{U}$

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{[\gamma] \\ \gamma : I \to X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) \in U}} U_{[\gamma]} \quad \text{et} \quad U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} = \begin{cases} U_{[\gamma]} \\ \emptyset \end{cases} \text{par } (\star)$$

Donc $p^{-1}(U) = \coprod$ copies de U, $\rightsquigarrow$ p est un revêtement. $\square$ C)

D) $\tilde{X}$ est connex et simp. connex.

pf: Soit $[c_{x_0}] \in \tilde{X}$ la classe du chemin const. et $[\gamma] \in \tilde{X}$.

Pour $t \in I$ on définie $\gamma_t(s) = \begin{cases} \gamma(s) & 0 \leq s \leq t \\ \gamma(t) & t \leq s \leq 1 \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $\Gamma : I \to \tilde{X}$, $t \mapsto [\gamma_t]$ est un chemin de $[c_{x_0}]$ à $[\gamma]$, donc $\tilde{X}$ est connex.

En plus $p \circ \Gamma(t) = \gamma_t(1) = \gamma(t)$ donc Γ est l'unique rel. de γ.

On a que Γ est un lacet $\Leftrightarrow [\underset{\gamma_1 = \gamma}{\gamma_1}] = [c_{x_0}] \Leftrightarrow \gamma \simeq c_{x_0}$

Donc 5.2 implique que $\mathrm{Im}(p_*) = \{1\} \Rightarrow \pi_1(\tilde{X}) = \{1\}$ car p_* est injective. $\square$ D) $\square$ Thm

Cor 5.8: Soit X connex, loc. connex et slsc. Alors $\forall H \subset \pi_1(X, x_0)$ $\exists$ un rev. $p_H : X_H \to X$ et un $\tilde{x}_0 \in p_H^{-1}(x_0)$ t.q.

$$p_{H*}(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H.$$

pf: Soit $\tilde{X} = \{\gamma : I \to X \mid \gamma(0) = x_0\}/\sim$ comme dans 5.7.

On déf. une rel. d'équiv sur $\tilde{X}$ par $[\gamma_1] \sim_H [\gamma_2] \Leftrightarrow \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ et $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in H$

$\sim_H$ est une rel. d'équiv:

$[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in H$

$\sim_H$ est une rel. d'équiv:

1) Refl. car $1 \in H$ 2) Symm. car $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] \in H \Rightarrow [\gamma_2 * \gamma_1^{-1}] = [\gamma_1 * \gamma_2^{-1}]^{-1} \in H$.

3) $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}], [\gamma_2 * \gamma_3^{-1}] \in H \Rightarrow [\gamma_1 * \gamma_3^{-1}] = [\ ][\ ] \in H$.

Soit $X_H = \tilde{X}/\sim_H$ et $p_H : X_H \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$. On a

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \arrow[r, "q"] & X_H \arrow[dl, "p_H"] \\ X & \end{tikzcd}$$

Pour $U \in \mathcal{U}$ comme dans 5.7 on avait vu, que
$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]\ldots} U_{[\gamma]}$$
Si $[\gamma_1] \sim_H [\gamma_2]$ alors aussi $[\gamma_1 * \eta] \sim_H [\gamma_2 * \eta]$ $\forall \eta : I \to U$, $\eta(0) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$

$\rightsquigarrow q(U_{[\gamma_1]}) = q(U_{[\gamma_2]})$ et donc $p_H^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]/\sim_H} U_{[\gamma]} \rightsquigarrow p_H : X_H \to X$ est un rev.

Soit $\tilde{x}_0 = [c_{x_0}] \in X_H$. Alors $p_{H*}\pi_1(X_H, \tilde{x}_0) = H \subset \pi_1(X, x_0)$ car par 5.2
$$\mathrm{Im}(p_{H*}) = \{ [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mid \tilde{\alpha} : I \to X_H \text{ avec } \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0 \text{ est un lacet} \}.$$
Mais on avait vu que dans 5.7 que l'unique rel. $\tilde{\alpha}$ (dans $\tilde{X}$) sat. $\tilde{\alpha}(1) = [\alpha]$.
Alors $\tilde{\alpha}$ un lacet $\Leftrightarrow [\alpha] \sim_H [c_{x_0}] \Leftrightarrow [\alpha] \in H$. $\square$

On a donc une surj.
$$\{\text{Rev. } p : \tilde{X} \to X\} \longrightarrow \{\text{Sous-grp de } \pi_1(X)\}.$$
Pour obtenir une bijection il faut identifier certains. rev.

<u>Def</u>: · Soient $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux rev.
Un <u>morphisme</u> de revêtements est une appl $f : Y_1 \to Y_2$ t.q. $p_2 \circ f = p_1$

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & Y_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

· f est un <u>isomorphisme</u> de revêtements si f est un homeom.

• f est un isomorphisme de revêtements si f est un homéom.

Rmk: • On a aussi des versions pointées.

• Un isom. pointé
$$\begin{tikzcd}(Y,y_0) \arrow[r] \arrow[dr] & (Y,y_0) \arrow[d] \\ & (X,x_0)\end{tikzcd}$$
est l'identité par 5.5.

Exple:
$$\begin{tikzcd}\mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[dl] \\ S^1 & \end{tikzcd}$$
• Pour $n \in \mathbb{Z}$, $f(x) = x+n$ est un isom. (non-pointé).

car $e^{2\pi i(x+n)} = e^{2\pi i x}$.

• Mais $f(x) = -x$ n'est pas un morph. de rev.

Thm 5.9 (Classification des rev.) Soit X conn., loc. conn. et slsc.

a) On a une bijection
$$\{\text{Rev. conn. } p : (Y,y_0) \to (X,x_0)\}/_{\text{Isom. pointé}} \xrightarrow{\sim} \{\text{Sous-groupes de } \pi_1(X,x_0)\}$$
$$(Y,y_0) \longmapsto p_*(\pi_1(Y,y_0))$$
$$(X_H, \tilde{x}_0) \longleftarrow\!\shortmid\ H$$

b) On a une bijection
$$\{\text{Rev. conn. } p : Y \to X\}/_{\text{Isom.}} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{matrix}\text{Classes de conjugaisons} \\ \text{des sous-groupes de } \pi_1(X,x_0)\end{matrix}\right\}$$

Rmk: Par b) il existe donc, à isom. près, un unique rev. $\tilde{X} \to X$ connex et simp. connex, corresp. à $\{1\} \subset \pi_1(X)$ qu'on appelle le revêtement universel.

• Ex: Pour $H_1 < H_2 < \pi_1(X,x_0)$ on a un morph. $X_{H_1} \to X_{H_2}$ de revêtements. En part. le rev. univ. domine tous les autres.

pf: Pour a) il suffit de montrer que
$$\begin{tikzcd}(Y,y_0) \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & (Y',y_0') \arrow[d, "p'"] \\ & (X,x_0)\end{tikzcd} \iff p_* \pi_1(Y,y_0) = p'_* \pi_1(Y',y_0').$$

“$\Rightarrow$” est clair car ...

(X, x_0)

"$\Rightarrow$" est clair car $p_* = p'_* \cdot f_*$.

"$\Leftarrow$" Par 5.4 $\exists$ el. $\tilde{p} : (Y, y_0) \to (Y', y_0')$ t.q. $p' \tilde{p} = p$ $\leadsto$ $\tilde{p}$ est un morph et aussi $\tilde{p}' : Y' \to Y$. Par l'unicité 5.5 on a $\tilde{p} \circ \tilde{p}' = 1_Y$ et $\tilde{p}' \circ \tilde{p} = 1_{Y'}$

Pour b) soit $p : Y \to X$ un rev. et $y_0, y_0' \in p^{-1}(x_0)$. Soit $\gamma : I \to Y$ un chemin de y_0 à y_0'. Alors $\underbrace{[p \cdot \gamma]}_{= g} \in \pi_1(X, x_0)$ et

$$g \, p_* \pi_1(Y, y_0') \, g^{-1} = \{ g \cdot [p \circ \gamma'] \cdot g^{-1} \mid \gamma'(0) = \gamma'(1) = y_0' \} = p_* \pi_1(Y, y_0)$$

Inversement, si $H' = g H g^{-1} \subset \pi_1(X, x_0)$ avec $g = [\gamma]$ on a $\tilde{\gamma} : I \to X_H$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 \in X_H$ et par le même argument $H' = p_{H*} \pi_1(X_H, \tilde{\gamma}(1))$ $\square$